No. 2
Vol. 2024

Katra

Ciencia, arte, tradición, opinión, reflexión y meditación.

Artículo: **Sobre las matemáticas. Un punto de vista...**

Autor(es): **M. en C. Germán Téllez Castillo**
gtellez4@gmail.com

Publicación: **No. 2, vol. 2024**

Páginas: **67 - 78**

No. 2
Vol. 2024

Sobre las matemáticas

Un punto de vista...

Germán Téllez Castillo
gtellez4@gmail.com

Las matemáticas, surgidas en la antigüedad por necesidades de la vida cotidiana, hoy se han convertido en un sistema de variadas y extensas disciplinas. Las matemáticas sirven de instrumento para el conocimiento de la naturaleza y reflejan leyes del mundo que nos rodea. Pero por el nivel de abstracción que la caracteriza, ocasiona que algunas de sus ramas se presentan como relativamente inaccesibles a los no especialistas.

Esa cualidad abstracta de las matemáticas dio lugar, ya desde la antigüedad, a nociones sobre su independencia respecto del mundo material. Pero ese grado de abstracción, no tiene su origen en un deseo perverso de los matemáticos de aislarse de la comunidad científica, a través de un lenguaje hermético. Ellos tenían que resolver problemas legados por la época "clásica" o provenientes de los nuevos hallazgos en las diferentes áreas del conocimiento. Esa tarea, sólo se podía conseguir, a condición de crear nuevos objetos y nuevos métodos, cuyo carácter abstracto, era indispensable para su éxito. El inevitable precio que hubo que pagar al hacerlo, fue despegarse del carácter concreto o semiconcreto de los objetos matemáticos clásicos, en donde lo esencial de esos objetos no consiste en sus particularidades aparentes, sino en las relaciones que guardan entre ellos.

A menudo ocurre que algunos objetos, que parecen muy diferentes entre sí, presentan sin embargo las mismas propiedades, por lo que era necesario representarlos de manera que no aparentaran ser diferentes. Por ejemplo, si se deseaba enunciar una relación que se pudiera definir entre números y entre funciones, era necesario introducir objetos, que no fueran ni números ni funciones, pero que se pudieran concretar en otro tipo de objeto matemático, hoy llamando *estructuras matemáticas*, como las estructuras algebraicas (monoides, semigrupos, grupos, anillos, etc).

El objetivo del presente artículo es dar un idea sobre la naturaleza esencial de la matemática; obvio es decir que existen limites de espacio y tiempo para hablar de esta amplia área de conocimiento, por lo que dentro de los límites de un artículo, no es posible agotar la riqueza del universo de las matemáticas. Por lo tanto, resulta inevitable una cierta libertad en la elección del enfoque a tratar. Para ello, no hay gran necesidad de entrar en detalles de teorías matemáticas recientes, puesto que la matemática elemental y la historia de la ciencia, proporcionan una base suficiente para obtener conclusiones generales.

Caracterización

Un conocimiento básico de la matemática, permite reconocer ciertas características:

- Abstracción, precisión, rigor lógico, el carácter de sus conclusiones y el campo de sus aplicaciones,
- Aplicaciones que hoy día están presentes en la vida diaria, en la tecnología y en la ciencia

Las abstracciones en la matemática tienen varios rasgos:

- Tratan fundamentalmente sobre las relaciones cuantitativas y formas espaciales, abstrayéndolas de todas las demás propiedades de los objetos estudiados.
- Aparecen en una sucesión creciente con diferentes niveles de abstracción, llegando más lejos que en las demás ciencias.
- Se mueve casi por completo en el campo de los conceptos abstractos y sus interrelaciones.

Mientras el científico de la naturaleza experimenta para demostrar sus afirmaciones, éste tiene que hacer una elección entre los diferentes modelos posibles del fenómeno que estudia, para encontrar aquel que se ajuste al mundo empírico, el mundo de los experimentos.

Por otro lado, el matemático emplea sólo razonamientos y cálculos. Ningún teorema pertenece a la matemática hasta que no ha sido demostrado por un razonamiento lógico. Demostrar un teorema significa deducir, mediante un razonamiento lógico, a partir de las propiedades de los conceptos que aparecen en ese teorema. De ese modo, no sólo los conceptos, sino también los métodos de la matemática, son abstractos y teóricos.

Existen matemáticas que no se utilizan en el estudio del mundo empírico, que están liberadas de las limitaciones del mundo real, pero que pueden conducir a conocimientos con profundas implicaciones en el mundo real y que hoy se consideran únicamente por su belleza; aquellas que se hacen desde un punto de vista puramente estético.

Por ejemplo, los conceptos abstractos de la *aritmética* se corresponden con las relaciones cuantitativas de las colecciones de objetos. Como resultado del análisis y generalización de la experiencia práctica, surgen los conceptos por la vía de la abstracción; esto es, los conceptos aparecen gradualmente; primero aparecieron los números relacionados con objetos concretos, luego los números abstractos y finalmente el concepto general de número. Cada uno de esos conceptos surgió por la combinación de la experiencia práctica y algunos conceptos abstractos anteriores. Es decir, los conceptos aparecen tras una serie de sucesivas abstracciones y generalizaciones, cada una de las cuales reposa en la combinación de experiencias con conceptos abstractos previos.

Las fuerzas que condujeron al desarrollo de la aritmética fueron las necesidades prácticas de la vida social. Esas necesidades prácticas, y el pensamiento abstracto que surgió de ellas, con su constante interacción, generan que los conceptos abstractos vayan mejorando debido a sus múltiples aplicaciones. La reflexión abstracta, a menudo trasciende las necesidades inmediatas de un problema práctico. Por ejemplo, el concepto de números tan grandes como un millón o un billón, aparecieron antes de que la necesidad práctica de hacer uso de ellos.

Otro ejemplo es la generalidad en la geometría; el volumen de una esfera se calcula como

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

, independientemente de si se trata de una esfera de acero, o de una gota de agua. La geometría puede abstraer lo que es común a todos los cuerpos, porque todo cuerpo real tiene una forma, una dimensión y una posición con respecto a los demás cuerpos.

Por otro lado, el desarrollo de la matemática es un proceso conflictivo entre elementos contrastantes: lo concreto y lo abstracto, lo particular y lo general, lo formal y lo material, lo finito y lo infinito, lo discreto y lo continuo, etc. Ningún objeto concreto, tiene una forma absolutamente precisa, y ninguna magnitud concreta puede medirse con exactitud absoluta, puesto que ni siquiera tiene un valor perfectamente definido. La longitud de un segmento, por ejemplo, no tiene sentido si se trata de precisarla en términos de las dimensiones atómicas.

Dado que la matemática sólo somete a estudio propiedades generales, al operar con abstracciones perfectamente definidas lo hace con independencia de los límites reales de su aplicabilidad; y esto no podía ser de otra forma, ya que estos límites son distintos en cada caso particular, o lo que es lo mismo, dependen de las propiedades concretas de los fenómenos en consideración y de los cambios cualitativos que tienen lugar en ellos. Por eso, al aplicar la matemática a un caso concreto, es necesario verificar la aplicabilidad real de la teoría en cuestión; por lo que hacer una distinción entre matemática pura y matemática aplicada, no tiene sentido en cuanto que estas, se entremezclan de tal manera que es imposible definir con precisión el límite entre una y otra. Por ejemplo, algunas ideas de la teoría de números, desarrolladas a partir de la curiosidad abstracta, son hoy la base de un método de criptografía que se utiliza en bancos, gobiernos y el ejército. Los estudios de *Alonso Church* y *Alan Turing* sobre las funciones computables abstractas contribuyó al desarrollo del producto más revolucionario de la segunda mitad del siglo XX, la computadora.

Por otro lado, considerar la materia como continua y describir sus propiedades mediante magnitudes continuas, sólo es posible si podemos hacer abstracción de su estructura atómica, lo cual sólo sucede en determinadas condiciones; esto nos lleva así a dos clases contradictorias de objetos: por una parte, los objetos discretos, indivisibles; y por otra, los objetos divisibles que, antes de ser separados en partes, son continuos. Estas características contradictorias van siempre unidas, puesto que no hay objetos completamente indivisibles ni completamente continuos.

Sin embargo, dada la existencia real de tales características, sucede a menudo que una de ellas predomina sobre la otra; el hecho de que la matemática separe las formas de sus contenidos determina ya una división en dos clases: las formas discretas y las formas continuas.

El modelo matemático de un objeto es la unidad, y el modelo matemático de una colección de objetos discretos es una suma de unidades, la imagen, podríamos decir, de lo puramente discreto, separada de todas las demás cualidades. Por otra parte, el modelo matemático original de la continuidad es la figura geométrica; para el caso más sencillo es la línea recta.

Ninguna teoría surge como resultado de la simple formulación de nuevos conceptos, sino que la creación y desarrollo de una teoría requieren que los nuevos conceptos permitan descubrir nuevas relaciones que contribuyan la solución de nuevos problemas. Es decir, un nuevo concepto sólo puede nacer, desarrollarse y ganar en generalidad y precisión sobre la base de esos mismos problemas que permite resolver y con base en los teoremas de los que forma parte.

Euclides, y los matemáticos que vivieron en los años siguientes, consideraron a su obra los «Elementos» como ejemplo del rigor lógico; No fue hasta el último tercio del siglo XIX, que las críticas a las construcciones euclidianas, se hicieron más numerosas, la tendencia era un movimiento general hacia un mayor "rigor" en las matemáticas. Las criticas no apuntaban a "corregir" las inferencias hechas por *Euclides* en el curso de sus demostraciones, sino al hecho de que algunas de éstas, no estaban suficientemente justificadas con sus definiciones y axiomas, sino que en algunas inferencias, *Euclides* recurre a la "evidencia" basado en el estudio de un dibujo. Pero fue sólo el entrenamiento en los rigores de la axiomática moderna lo que hizo notar esas imperfecciones, aparte de la espinosa cuestión del postulado de las paralelas.

El sentimiento general era, completar de manera apropiada, estos fundamentos para lograr una explicación completamente satisfactoria. Esa tarea fue llevada acabo por *Moritz Pasch* y *David Hilbert*. Ellos reestructuraron el sistema de axiomas (veintitrés axiomas en el caso de *Hilbert*), y gracias a ello, todos los teoremas de *Euclides* pudieron por fin demostrarse sin diagramas.

Pasch y *Hilbert* dieron una forma precisa a la geometría, tarea que se extendió casi de inmediato, a todas las ramas de las matemáticas por sus contemporáneos y sus sucesores. La esencia fue un abandono progresivo del concepto de "verdades evidentes", primero en geometría y luego en el resto de las matemáticas.

Pero no debemos dejarnos seducir por la idea de que la matemática contemporánea posee un "rigor absoluto". Una ciencia que no está muerta, no puede ser de forma alguna, perfecta; pero podemos decir que los fundamentos, por ejemplo del análisis tal como están actualmente, corresponden satisfactoriamente con los problemas contemporáneos de la ciencia y con la concepción moderna de la precisión lógica; la continua profundización en estos conceptos y las discusiones que hoy día existen, no llevan, ni llevarán, a desecharlos, sino que conducirán a un conocimiento, más preciso y profundo. Por lo que podemos decir que, el establecimiento de los principios básicos de una teoría constituye un resumen de su desarrollo, no representa su final, sino que conducen a un ulterior desarrollo.

El desarrollo de todas las ramas de la matemática se ha llevado acabo de manera gradual, con base en resultados que suelen venir de diversas direcciones; a menudo se han necesitado décadas e incluso cientos de años de esfuerzos antes de conseguir algún progreso de importancia.

Las cuidadosas y ordenadas exposiciones que se hacen en los cursos habituales de matemáticas, dejan la impresión de que los matemáticos han avanzado de un teorema al siguiente de una manera natural y lineal, y que la teoría está ya acabada; no muestran los conflictos del proceso creativo, las frustraciones y el largo y sinuoso camino que los matemáticos han tenido que recorrer para llegar a construir una estructura importante, a la que aún le falta llenar huecos o le quedan por hacer generalizaciones importantes. Estar consciente de esa realidad, debería animarnos a trabajar con tenacidad, a estudiar e investigar en matemáticas.

El surgimiento de nuevas técnicas no sólo permite realizar investigaciones que hasta ahora eran casi impracticables. Por ejemplo, dichas técnicas han dado un impulso al desarrollo de los métodos aproximados; métodos que permiten alcanzar, mediante una cadena de operaciones elementales, el resultado numérico deseado con una precisión suficientemente alta.

En todas las épocas, el nivel técnico de los medios de cálculo ha ejercido una influencia sobre los métodos matemáticos; llegar al resultado numérico final de los problemas prácticos que surgen en nuestros días requiere un gran número de tales operaciones; la solución de tales problemas resultaba prácticamente imposible debido a la gran cantidad de tiempo o memoria necesarios para obtener un resultado. Las modernas máquinas de cálculo, construidas sobre la base de nuevos principios, permiten efectuar cálculos a gran velocidad y realizar al mismo tiempo complicadas cadenas de cálculos automáticamente.

Algunos de los rasgos característicos de la matemática moderna que la distinguen de sus anteriores desarrollos, son la extensión del campo que cubren éstas y sus aplicaciones; tal extensión del objeto y del campo de aplicación, representa un crecimiento cuantitativo y cualitativo, originado por la aparición de nuevas teorías y métodos que permiten resolver nuevos problemas o problemas que eran inaccesibles hasta ese momento.

Otro de sus rasgos es la formación de conceptos generales a un nuevo y mayor nivel de abstracción; este rasgo garantiza la preservación de la unidad de la matemática, a pesar de su inmenso crecimiento en ramas tan diferentes; esto garantiza a los métodos matemáticos actuales, una generalidad y amplitud en sus aplicaciones.

Resumiendo, diremos que, mientras la matemática elemental se ocupa de las magnitudes constantes, la siguiente etapa, es la de las magnitudes variables. La matemática contemporánea es la matemática de todas las posibles relaciones e interdependencias cuantitativas entre magnitudes.

Sobre los programas de estudio

En mi opinión, los programas de estudio, deberían brindar a los estudiantes, las herramientas que necesitarán para usar, comprender e incluso hacer matemáticas que aún no existen. Las matemáticas principalmente tratan de ideas. Mi objetivo como docente es brindarles a los estudiantes la oportunidad de lidiar con estas ideas y sumergirse en el proceso de descubrimiento matemático. La participación repetida en ese proceso, se espera que agudice su mente y desarrolle su madurez mental marcada por un pensamiento claro y riguroso.

Una educación debe preparar a las personas para hacer y explorar preguntas en contextos que aún no existen y para poder abordar problemas que nunca han enfrentado. Es importante que pongamos estas cuestiones en primer plano y nos enfoquemos explícitamente en que los estudiantes produzcan, en lugar de consumir, conocimiento. Si realmente queremos que nuestros estudiantes sean independientes, curiosos y perseverantes, entonces debemos brindarles los medios para adquirir esas habilidades. Su viabilidad como profesionales en la fuerza laboral moderna depende de su capacidad para adoptar esa mentalidad.

El énfasis también debería estar puesto en apoyar al estudiante a comprender, construir demostraciones y a aprender a escribir matemática. Aprender una nueva habilidad requiere dedicación y paciencia durante los períodos de frustración. No debe existir miedo de hacer ajustes y cometer errores. Siempre puede volver a revisarse un trabajo. No se debe esperar que la mayoría de las cosas se realicen a la perfección en su primer intento. Las tareas que se le asignen a los estudiantes deberían requerir que resuelvan problemas, conjeturen, experimenten, exploren, creen y se comuniquen.

Pero para capturar y comunicar ideas matemáticas debemos hacer afirmaciones sobre objetos matemáticos y gran parte de la actividad matemática puede describirse como la formulación de afirmaciones matemáticas y luego la determinación de si dichas afirmaciones son verdaderas o falsas. Los intentos por escribir una demostración, son una parte importante del proceso de aprendizaje y descubrimiento; sea quien sea el lector, la prueba debe expresarse con la mayor claridad posible y, para lograrlo, el escritor debe comprender la lógica de la demostración.

Centrarse en la estructura lógica es un primer paso importante para abordar la pregunta ¿Por dónde empezar? Además, uno necesita saber el significado preciso de las palabras, en lugar de sólo la "idea general". Por ejemplo, un *teorema* es un enunciado matemático que se demuestra mediante un razonamiento matemático. Un sinónimo de *teorema* es la *proposición*. Sin embargo, en los trabajos de matemáticas, el término *teorema* normalmente se reserva para los resultados más importantes, mientras que *proposición* se utiliza para otros resultados interesantes pero generalmente menos importantes.

Verificar que una afirmación matemática es falsa, implica proporcionar un ejemplo específico en el que la afirmación falla. Ese proceso se denomina *contraejemplo*, e implica observar que, resulta suficiente proporcionar un ejemplo para verificar que una afirmación general no es verdadera. Pero, si una afirmación es verdadera, entonces se se requiere demostrarla. El proceso de aprender a encontrar una demostración y a reconocer cuando lo que uno ha escrito es una demostración correcta, es un proceso activo, y no pasivo.

Las matemáticas consisten en descubrir demostraciones y escribirlas de forma clara y convincente por lo que la carga de la comunicación recae sobre el que escribe, no sobre el lector; es su trabajo explicar sus pensamientos; no es el trabajo del lector adivinarlos a partir de algunas pistas. El autor está tratando de convencer a un lector escéptico que no le cree, por lo que necesita argumentar con una lógica hermética, en un lenguaje claro como el cristal; de lo contrario, el lector seguirá dudando.

Si un estudiante no escribió algo en el papel, entonces: (a) no lo comunicó, (b) el lector no lo aprendió, y (c) el calificador puede asumir que el estudiante no tiene firme el conocimiento en primer lugar. Además, es importante que un estudiante conozca la diferencia entre *proposiciones* y *objetos*. Un *objeto matemático* es una cosa, un sustantivo, como un conjunto, un elemento, un número, un par ordenado, un espacio vectorial, etc. Los *objetos* existen o no existen. Las *proposiciones*, por otro lado, son oraciones matemáticas: son verdaderas o falsas. Esas ideas, colocan el acento en algunos de los rasgos característicos de la matemática.

La mejor aplicación que podemos hacer de las matemáticas, es usarlas para cultivar una actitud *activa* y *proactiva* entre los estudiantes, que permita desarrollar y fortalecer la capacidad de criticar, analizar, sintetizar, generalizar y particularizar las ideas, sin despejarlas de su verdadero contenido, siempre en busca del conocimiento. El desarrollo del método de razonamiento lógico, es importante en la vida diaria de todos, y esencial para aplicarlo en otras áreas del conocimiento. Aprender a usar el lenguaje y la notación matemática, así como comunicar ideas matemáticas de manera correcta y precisa, debería ser uno de los beneficios de impartir cursos de matemáticas, dado que la mayoría de los estudiantes, bien podrían no utilizar más, la mayor parte del contenido del curso.

En México, existen diversas instituciones académicas que ofrecen programas para estudiar matemáticas, por ejemplo, sin ser exhaustivo: el Instituto Politécnico Nacional, la Universidad Autónoma Metropolitana, la Universidad Nacional Autónoma de México, la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, el Centro de Investigación en Matemáticas, AC., la Universidad Autónoma de Yucatán , entre otras.

" Cuanto más sabes, más te das cuenta de lo mucho que no sabes…"

Anónimo

Para conocer más, consulta:

1) Smilka Zdravkovska
Golden Years of Moscow Mathematics
American Mathematical Society; Annotated edition (1993)

2) Maurice Mashaal
Bourbaki: A Secret Society of Mathematicians
American Mathematical Society (2006)

3) Morris Kline
Mathematics: The Loss of Certainty
Oxford University Press; Reprint edition (1982). (Galaxy Books) Reprint Edition

4) Morris Kline
Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math. Paperback – January 1, 1974
Random House Inc (1974)

5) Ian Stewart
Letters to a Young Mathematician
Basic Books (2007)

6) What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods
Courant Institute of Mathematical Sciences Richard Courant, Herbert Robbins,and Ian Stewart
Oxford University Press; Edición 2nd ed. (1996)

Nota histórica…

El axioma de las paralelas o, como a menudo también se le conoce, del quinto postulado de Euclides (en otras ediciones de los Elementos es el Axioma XI) se suele enunciar del siguiente modo:

> *«Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta».*

Recordamos que una recta es paralela a otra si ambas están en un plano y no se intersectan). Euclides probó la existencia de rectas paralelas sobre la base de su axioma de las paralelas y los demás axiomas. Por lo que la teoría de las rectas paralelas, basada en el Postulado V, se convirtió en objeto de comentarios y críticas.

Ya desde la antigüedad se hicieron intentos de cambiar la definición de rectas paralelas; de modificar la definición del postulado mismo. Se hicieron dos tipos de intentos. El primero consistió en sustituir el axioma de las paralelas por un enunciado aparentemente más evidente. El segundo tipo de esfuerzos consistió en tratar de deducirlo de los otros axiomas de Euclides; de esta forma, el quinto postulado se convertiría en un teorema y dejaría de ser cuestionado.

A comienzos del siglo XIX el problema se encontraba en la misma situación que en la época de Euclides. La teoría de las rectas paralelas se convirtió, a lo largo del siglo XIX en uno de los principales problemas de la geometría.

La solución fue dada, por primera vez, por N. I. Lobachevski, profesor de la Universidad de Kazan en 1826. La primera conclusión a la que llegó fue que el Quinto Postulado no se puede probar. La segunda conclusión, que sobre la base de la proposición opuesta se puede desarrollar una cadena de consecuencias, es decir, teoremas, que no contienen contradicción alguna. Estas consecuencias forman por derecho propio una teoría no contradictoria.